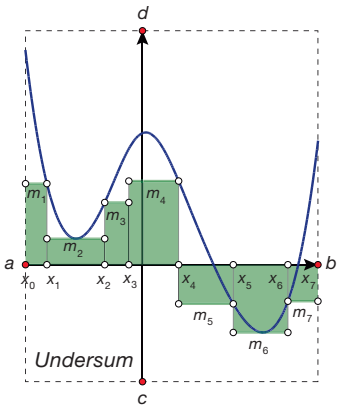
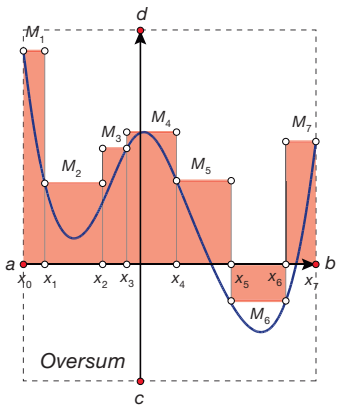
2. Numerisk integration – summer og integraler

I kapitel 2 har vi indført *integration* som den modsatte regningsart af *differentiation*. At bestemme et integral indebærer at bestemme en *stamfunktion*. Og integralregningens hovedsætning – sætning 5 i afsnit 4 – fortæller, at arealet under grafen for en funktion kan bestemmes ved hjælp af stamfunktioner, dvs. som et integral. Dette går godt, så længe vi kan *finde* stamfunktioner. Men desværre er det sådan, at det kan vi meget sjældent!

Alle kontinuerte funktioner har stamfunktioner – det beviser vi i dette kapitel. Men de kan sjældent udtrykkes vha. de traditionelle funktioner. Selv så simple funktioner som $\cos(\sqrt{x})$ eller $\exp(x^2) = e^{x^2}$ kan vi ikke klare. Vi så i kapitel 2, at vi egentlig heller ikke kan klare en af de mest simple, nemlig hyperbelfunktionen $\frac{1}{x}$. Her foretog vi så det greb, at vi definerede en ny funktion, $\ln(x)$, ved hjælp af integralregning, og hovedsætningen gav så, at den nye funktion, $\ln(x)$, faktisk er en stamfunktion. Dette greb vil vi møde flere gange i dette kapitel.

Hvad gør vi generelt? Vi vender tilbage til den oprindelige definition på integraler hos Leibniz, nemlig som grænseværdi af summer. Det giver samtidig en større indsigt i, hvad integraler egentlig er, og hvilke problemer, de kan løse.





2.1 Undersummer, oversummer og middelsummer

Vi ser i det følgende på en *begrænset* funktion $f(x)$ defineret på et lukket interval $[a;b]$. At funktionen er begrænset betyder, at dens værdimængde ligger i et lukket interval $[c;d]$. Hele grafen forløber altså inden for et rektangel $[a;b] \times [c;d]$, jf. figuren.

For at definere integralet, inddeler vi x-intervallet $[a;b]$ i N delintervaller med delepunkterne $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, x_N = b$, hvor intervalinddelingerne ikke behøver være lige lange. Delepunkterne opfylder altså ulighederne:

$$a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_{N-1} \le x_N = b$$

I hvert af delintervallerne er funktionsværdierne såvel opadtil som nedadtil begrænset, og vi kan derfor finde y-værdier m_i og M_i, der opfylder:

$$m_i \le f(x) \le M_i \quad \text{for} \quad x_{i-1} \le x \le x_i$$

Vi siger da, at summen:

$$s = m_1 \cdot (x_1 - x_0) + \ldots + m_N \cdot (x_N - x_{N-1}) \quad \text{er en } \textit{undersum}$$

og tilsvarende, at summen:

$$S = M_1 \cdot (x_1 - x_0) + \ldots + M_N \cdot (x_N - x_{N-1}) \quad \text{er en } \textit{oversum}$$

Læg mærke til, at summerne er bygget op efter samme metode som summer af rektangelarealer: $\sum$ højde · grundlinje, men med den ene forskel

9788770668781_indhold.indb 318 12/08/2019 12.42

at højderne er erstattet med y-værdier, der altså ikke behøver være positive. For en given intervalinddeling er det klart, at enhver af undersummerne ligger under enhver af oversummerne, da grundlinjerne er fælles. Men faktisk gælder det samme også for undersummer og oversummer hørende til hver sin intervalinddeling, da vi kan samle delepunkterne til en samlet intervalinddeling og splitte de tilhørende grundlinjer i to, samtidigt med at vi bibeholder y-værdierne. Enhver undersum er altså mindre end enhver oversum: $s \le S$. Hvis vi nu ydermere kan finde undersummer og oversummer, hvor forskellen er vilkårligt lille, så har vi i den indledende fortælling redegjort for, at der findes netop ét tal I, der skiller undersummerne fra oversummerne, dvs. der gælder $s \le I \le S$. I sådanne tilfælde siger vi, at funktionen f er *Riemann-integrabel*, og at integralet har værdien I.

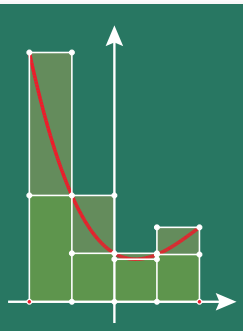
Bemærkning: Vi fortæller nærmere om den tyske matematiker Bernhard Riemann i afsnit 2.2

Definition: Riemann-integralet

En begrænset funktion f defineret på et lukket interval $[a;b]$ er Riemann-integrabel, netop når vi kan finde undersummer og oversummer med vilkårlig lille forskel. Integralet

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

er da det entydigt bestemte tal I, der adskiller undersummerne fra oversummerne.



Øvelse 7.7 **Riemann-integraler af konstante og stykvis konstante funktioner**

a) Gør rede for, at hvis funktionen f er konstant, dvs. $f(x) = k$ i intervallet $[a;b]$, så er f Riemann-integrabel, og integralet er givet ved $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b k\,dx = k \cdot (b-a)$.

b) Gør rede for, at hvis funktionen f er stykvis konstant på formen:

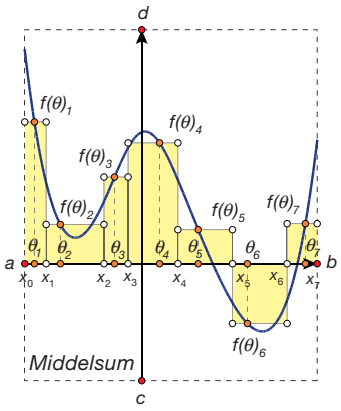
$$f(x) = \begin{cases} k_1 \text{ for } a \le x < c \\ k_2 \text{ for } c \le x \le b \end{cases}$$

så er f Riemann-integrabel, og:

$$\int_a^b f(x)\,dx = k_1 \cdot (c-a) + k_2 \cdot (b-c)$$

(*Hint*: Split intervallet $[a;b]$ i tre delintervaller $[a;c-h]$, $[c-h;c+h]$, $[c+h;b]$, hvor h kan vælges vilkårligt lille.)

9788770668781_indhold.indb 319 12/08/2019 12.42



Svarende til undersummer og oversummer kan vi også indføre *middelsummer*:

Definition: Middelsummer

Der er givet en begrænset funktion f defineret på et lukket interval $[a;b]$ og en vilkårlig intervalinddeling med delepunkter $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, x_N = b$. Til ethvert delinterval $[x_{i-1};x_i]$ vælges en x-værdi θ_i. Den tilhørende middelsum er da defineret ved:

$$\sigma = f(\theta_1)\cdot(x_1 - x_0) + f(\theta_2)\cdot(x_2 - x_1) + \ldots + f(\theta_N)\cdot(x_N - x_{N-1})$$

Specielle valg af delepunkter fører til særligt simple middelsummer:

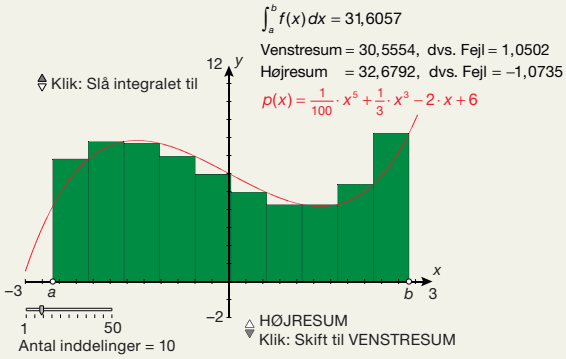
- Hvis vi hver gang vælger venstre endepunkt for delintervallet, fås en *venstresum*.
- Hvis vi hver gang vælger højre endepunkt for delintervallet, fås en *højresum*.
- Hvis vi hver gang vælger midtpunktet for intervallet, fås en *midtsum*.

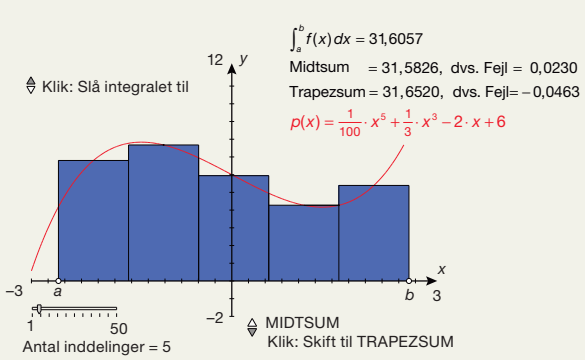
Disse bruges typisk som tilnærmelser til integraler, når det er nødvendigt at beregne disse med numeriske metoder. I praksis anvender værktøjsprogrammerne dog langt mere effektive metoder. Du kan finde mere herom på bogens **website**.

Øvelse 7.8 Eksperimentere med forskellige middelsummer

Opstil i dit værktøjsprogram en beregning af de tre typer middelsummer for funktionen $f(x) = e^{0,2\cdot x^2}$. Fastsæt intervallet til fx $[-3;3]$, og fastlæg antallet af delintervaller med en skyder, således at disse nemt kan ændres. Herefter opstilles en følge af x-værdier svarende til den valgte inddeling, og ud fra denne kan funktionsværdierne beregnes. Endelig kan arealet af hvert af de relevante rektangler udregnes, og summen af disse er en tilnærmelse til integralet.

På bogens **website** kan du finde animationer, der grafisk viser, hvordan disse summer udvikler sig afhængigt af antallet af delintervaller.





9788770668781_indhold.indb 320 12/08/2019 12.42

2.2 Eksistens af integralet for monotone og kontinuerte funktioner

Det viser sig, at alle kontinuerte funktioner er Riemann-integrable, og at middelsummerne konvergerer mod integralet. Først viser vi følgende:

Sætning 1: Integralet af monotone funktioner

Enhver monoton funktion f defineret på et lukket interval $[a;b]$ er Riemann-integrabel.
Enhver middelsum konvergerer mod Riemann-integralet, når længden af det største delinterval g_N går mod nul:

$$\sum_{i=1}^{N} f(\theta_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{N} f(\theta_i)\cdot\Delta x_i \;\to \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{for} \quad g_N \to 0$$

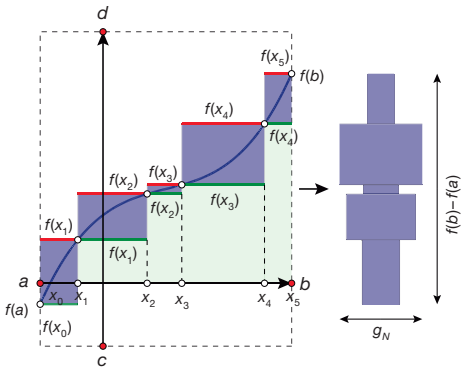
hvor $g_N \geq x_i - x_{i-1}$ for alle i.

Bevis

Vi antager, at f er voksende. Beviset for en aftagende funktion er det samme. Først bemærker vi, at enhver voksende funktion er begrænset, idet der gælder:

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

For enhver inddeling af intervallet $[a;b]$ i N delintervaller, kan vi nu vælge funktionsværdien i venstre endepunkt i konstruktionen af en undersum, dvs. at venstresummen er en undersum. Tilsvarende kan vi vælge funktionsværdien i højre endepunkt i konstruktionen af en oversum, dvs. at højresummen er en oversum. Der gælder da:



$$\begin{aligned}
S_{højre} - s_{venstre} &= \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{N} f(x_{i-1})\cdot(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left(f(x_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) - f(x_{i-1})\cdot(x_i - x_{i-1})\right) && \text{Sammensæt summer} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)\cdot(x_i - x_{i-1}) && \text{Sæt } x_i - x_{i-1} \text{ udenfor parentes} \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)\cdot g_N && \text{Anvend } g_N \geq x_i - x_{i-1} \\
&\leq g_N \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right) && \text{Sæt } g_N \text{ uden for sum} \\
&= g_N \cdot \left(f(b) - f(a)\right) && \text{Reducer}
\end{aligned}$$

9788770668781_indhold.indb 321 12/08/2019 12.42

Men det viser netop, at forskellen mellem undersummen og oversummen går mod nul, når længden af det største delinterval går mod nul. Den voksende funktion f er altså Riemann-integrabel.
Hvis nu vi betragter en vilkårlig middelsum, gælder der for ethvert delinterval $[x_{i-1}; x_i]$

$$f(x_{i-1}) \leq f(\theta_i) \leq f(x_i)$$

fordi funktionen f er voksende. Ganger vi nu med den positive længde af delintervallet, bevares ulighedstegnene, og vi får:

$$f(x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq f(\theta_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq f(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Lægger vi endeligt alle bidragene sammen, gælder der således, at:

$$s_{venstre} \leq middelsum \leq s_{højre}$$

Både integralet og middelsummen ligger altså i klemme mellem undersummerne og oversummerne. Men når længden af det største delinterval går mod 0, går forskellen mellem højresummen og venstresummen mod 0, og dermed tvinges middelsummen til at konvergere mod integralet. Vi har altså vist

$$\sum_{i=1}^{N} f(\theta_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=1}^{N} f(\theta_i) \cdot \Delta x_i \ \rightarrow \ \int_a^b f(x)\, dx .$$

Hovedsætningen om Riemann-integralet siger følgende:

Sætning 2: Eksistens af integralet for kontinuerte funktioner

Enhver kontinuert funktion f defineret på et lukket interval $[a;b]$ er Riemann-integrabel.
Enhver middelsum konvergerer mod Riemann-integralet, når længden af det største delinterval går mod nul.

Beviset ligger på bogens **website**.

Riemann-integralet blev introduceret i 1854 af Bernhard Riemann (1826-1866). Formålet var at få matematisk styr på de intuitive definitioner og metoder, man havde arbejdet med siden Newtons og Leibniz' tid. Det var et meget stort bidrag til den moderne matematik, og Riemann regnes i dag for en af de største matematikere gennem hele historien. Men også Riemanns integral stødte mod en grænse og blev videreudviklet først og fremmest af den franske matematiker Henri Lebesgue (1875-1941).
På bogens **website** kan du finde et projekt om Lebesgue-integralet.

Bernhard Riemann (1826-1866)

9788770668781_indhold.indb 322 12/08/2019 12.42

2.3 De simple regneregler for integraler

Vi har endnu ikke vist, at der er en sammenhæng mellem Riemann-integralet og det integral, vi definerede ved hjælp af stamfunktioner. Dette viser vi i afsnit 2.4. I dette afsnit viser vi, at Riemann-integralet opfylder samme regneregler som "stamfunktions-integralet". Først en simpel udvidelse af integralbegrebet, der tillader os at integrere "baglæns". Vi har i det foregående antaget, at $a < b$. I almindelighed definerer vi:

Definition: Baglæns integration

Antag, at f er integrabel på det lukkede interval $[a;b]$. Så definerer vi:

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Dvs. at når grænserne byttes om, skifter integralet fortegn.

Sætning 3: Almene regneregler for integration

1) Antag, at f er integrabel på det lukkede interval $[a;b]$. Så er f også integrabel på ethvert delinterval. Specielt gælder:

   Nulreglen: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

   Indskudsreglen: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

2) Antag, at f er integrabel på det lukkede interval $[a;b]$. Hvis k er en vilkårlig konstant, så er $k \cdot f(x)$ også integrabel på det lukkede interval $[a;b]$, og der gælder:

   Reglen om produkt med en konstant: $\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$

3) Antag, at f er integrabel på det lukkede interval $[a;b]$. Hvis k og m er vilkårlige konstanter, og hvis funktionen f yderligere er integrabel på det forskudte interval $[k \cdot a + m;\ k \cdot b + m]$, så er den forskudte funktion $f(k \cdot x + m)$ også integrabel på det lukkede interval $[a;b]$, og der gælder:

   Reglen om lineær substitution: $\int_a^b f(k \cdot x + m)\,dx = \frac{1}{k} \cdot \int_{k \cdot a + m}^{k \cdot b + m} f(x)\,dx$.

4) Antag, at f og g er integrable på det lukkede interval $[a;b]$. Så gælder:

   Sumreglen og differensreglen: $\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$.

9788770668781_indhold.indb 323 12/08/2019 12.42

Øvelse 7.9 Bevis for regnereglerne

Ideen i beviserne for regnereglerne er at udnytte sætning 2, nemlig at integralet er grænseværdi for enhver middelsum. Prøv selv de to første:

a) Bevis indskudssætningen ved at opstille to følger af middelsummer, der konvergerer med hvert af leddene på højre side. Slår vi de to følger sammen, får vi en middelsum for venstresiden.

b) Reglen om konstantfaktor bygger på parentesregler. Prøv selv.

Kontoller dine beviser med dem, du finder på bogens **website**.

I kapitel 2, afsnit 7.2 argumenterede vi for, at den gennemsnitlige fart, eller middeltallet over en periode fra a til b, kan beregnes som et integral:

$$\langle f(x)\rangle_{[a;b]} = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$

Hvis f er kontinuert med minimumsværdien $m = \min f(x)$ og maksimumsværdien $M = \max f(x)$, så er $m\cdot(b-a)$ en undersum og $M\cdot(b-a)$ en oversum for integralet. Derfor gælder der:

$$m\cdot(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M\cdot(b-a)$$

Dermed fås, idet $b-a>0$:

$$m \le \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

Men ifølge *sætningen om mellemliggende værdier* (sætning 2 i kapitel 1), så følger heraf, at tallet $\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx$ optræder som en funktionsværdi $f(\theta)$:

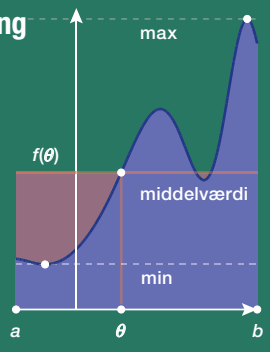
Sætning 4: Integralregningens middelværdisætning

Hvis $f(x)$ er en kontinuert funktion på det lukkede interval $[a;b]$, findes der en x-værdi θ i det lukkede interval $[a;b]$, så:

$$\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx = f(\theta)$$

eller:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\theta)\cdot(b-a)$$



9788770668781_indhold.indb 324 12/08/2019 12.42

For *kontinuerte* funktioner kan man udnytte dette til at omskrive integralet til en middelsum. Ser vi nemlig på en vilkårlig intervalinddeling, så kan vi udnytte sætningen på hvert delinterval:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)\,dx$$
$$= f(\theta_1)\cdot(x_1 - x_0) + f(\theta_2)\cdot(x_2 - x_1) + f(\theta_3)\cdot(x_3 - x_2) + \ldots + f(\theta_N)\cdot(x_N - x_{N-1})$$

hvor $f(\theta_i)$ netop er gennemsnitsværdien for den kontinuerte funktion f hen over delintervallet $[x_{i-1}; x_i]$.

Øvelse 7.10 **Beregning af middelværdier over et grafisk forløb**

a) Hastigheden af et bestemt projektil kan efter affyringen beskrives ved funktionen:

$f(t) = -0{,}0004 \cdot t^2 + 0{,}3 \cdot t$

Tegn grafen, og bestem den gennemsnitlige hastighed.

b) I et bestemt elektrisk netværk er strømforsyningen til husholdninger udformet som en vekselstrøm, hvor effekten varierer ifølge formlen:

$p(t) = 200 \cdot \sin^2(300t)$

Tegn grafen, og bestem den gennemsnitlige effekt. Beregn dette over én periode, da funktionen er periodisk. Når der på et husholdningsapparat angives en effekt på fx 80 watt, så er dette middelværdien.

På bogens **website** kan du finde et projekt med eksempler på brug af sætning 4.

2.4 Bevis for analysens hovedsætning

Vi har i sætning 2 vist, at en kontinuert funktion f defineret på et lukket interval $[a;b]$ er Riemann-integrabel. I sætning 3 viste vi, at f dermed også er Riemann-integrabel på ethvert delinterval af $[a;b]$. Vi kan derfor definere en integralfunktion:

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,dx, \quad \text{hvor } t \in [a;b]$$

Vi vil nu vise, at integralfunktionen er en stamfunktion, dvs. F er differentiabel med differentialkvotient lig med den oprindelige funktion.

Sætning 5: Sammenhængen mellem integration og differentiation (analysens hovedsætning)

Hvis funktionen f er en kontinuert funktion på det lukkede interval $[a;b]$,
så er integralfunktionen: $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$
en stamfunktion til f: $F'(t) = f(t)$
Desuden gælder der, at: $\int_a^b f(x)\,dx = F_1(b) - F_1(a)$, hvor F_1 er en vilkårlig stamfunktion til f.

9788770668781_indhold.indb 325 12/08/2019 12.42

På bogens **website** ligger et bevis, der anvender tretrinsreglen.

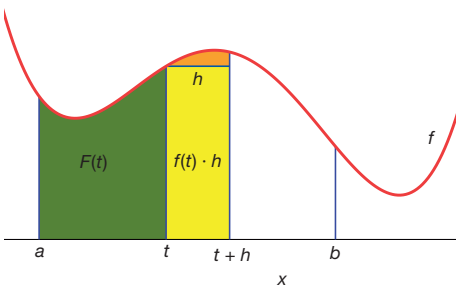
Bevis

Vi erindrer om definitionen på differentiabilitet, skrevet med F:
En funktion F siges at være *differentiabel i t*, hvis der findes et tal a og en *epsilon-funktion* $E(h)$, således at der i et interval omkring t gælder følgende:

$$F(t+h) = F(t) + a \cdot h + E(h) \cdot h \qquad (*)$$

Tallet a kaldes i så fald for differentialkvotienten for F i punktet t og betegnes $F'(t)$.

Husk i det følgende, at t er et fast tal og x en variabel størrelse!



Venstre side i (*) er pr. definition af F:

$$F(t+h) = \int_a^{t+h} f(x)\,dx$$

På illustrationen er det arealet under grafen i området fra a og hen til $t+h$.
Anvend *indskudssætningen* på $F(t+h)$:

$$F(t+h) = \int_a^{t+h} f(x)\,dx = \int_a^{t} f(x)\,dx + \int_t^{t+h} f(x)\,dx \quad \text{eller:}$$

$$F(t+h) = F(t) + \int_t^{t+h} f(x)\,dx \qquad (**)$$

Inspireret af illustrationen deler vi nu det sidste integral op i to dele:

$\int_t^{t+h} f(x)\,dx$ = gule og orange eller:

$$\int_t^{t+h} f(x)\,dx = \int_t^{t+h} f(t)\,dx + \int_t^{t+h} \big(f(x) - f(t)\big)\,dx \qquad \text{anvend sætning 3 punkt 4}$$

$$= f(t) \cdot h + \int_t^{t+h} \big(f(x) - f(t)\big)\,dx \qquad \text{anvend øvelse 7.7, punkt 1}$$

Sætter vi det sidste ind i (**), har vi:

$$F(t+h) = F(t) + f(t) \cdot h + \int_t^{t+h} \big(f(x) - f(t)\big)\,dx \qquad (***)$$

Anvendes integralregningens middelværdisætning på integranden $\big(f(x) - f(t)\big)$, får vi:
Der findes et tal θ mellem t og $t+h$, så:

$$\int_t^{t+h} \big(f(x) - f(t)\big)\,dx = \big(f(\theta) - f(t)\big) \cdot h = E(h) \cdot h \qquad (****)$$

hvor vi har sat $E(h) \cdot h = \big(f(\theta) - f(t)\big) \cdot h$.

θ ligger hele tiden i intervallet $[t; t+h]$, så når $h = 0$, er $\theta = t$.

$E(h)$ er en epsilonfunktion, fordi:
1) $E(0) = \big(f(t) - f(t)\big) = 0$, hvor vi har udnyttet, at $\theta = t$.
2) Når $h \to 0$, vil $\theta \to t$, og derfor $E(h) = \big(f(\theta) - f(t)\big) \longrightarrow \big(f(t) - f(t)\big) = 0$, da f er kontinuert.

9788770668781_indhold.indb 326 12/08/2019 12.42

Sættes (****) ind i (***), får vi nu det ønskede:

$$F(t+h) = F(t) + f(t)\cdot h + E(h)\cdot h$$

Konklusion: F er differentiabel, og $F'(t) = f(t)$, dvs: $\frac{d}{dt}\left(\int_a^t f(x)\,dx\right) = f(t)$

Den sidste påstand følger dels af definitionen af F:

$$F(b) = \int_a^b f(x)\,dx \quad og \quad F(a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

hvoraf: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

– og dels af vores viden om stamfunktioner:
For en given anden stamfunktion $F_1(t)$ findes en konstant c, så:

$$F(t) = F_1(t) + c \quad dvs:$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \left(F_1(b) + c\right) - \left(F_1(a) + c\right) = F_1(b) - F_1(a)$$

hvilket var det ønskede.

3. Anvendelser af integraler

3.1 Kurvelængder

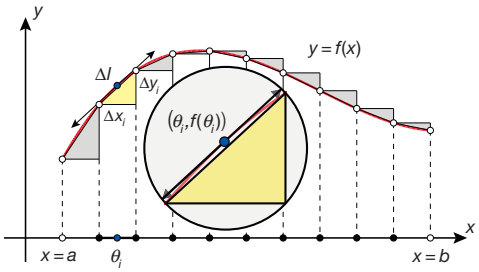
Definition: Kurvelængden for en graf

Antag, at grafen for en kontinuert funktion defineret på et lukket interval $[a;b]$ har følgende egenskab: Den samlede længde af sekanterne hørende til en vilkårlig opdeling i delintervaller har en entydigt bestemt grænseværdi, når længden af det største delinterval går mod nul. Så tilskrives grafen en kurvelængde givet ved denne grænseværdi.

Den enkelte sekant er ifølge middelværdisætningen (sætning 19 i *Hvad er matematik?* 2, kapitel 5A) parallel med en passende tangent i delintervallet. Kaldes røringspunktet for denne tangent for θ_i, så kan sekantens længde udregnes således:

$$\Delta l_i = \sqrt{\Delta y_i^{\,2} + \Delta x_i^{\,2}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2 + 1}\cdot \Delta x_i = \sqrt{f'(\theta_i)^2 + 1}\cdot \Delta x_i$$

hvor $\Delta x_i = \frac{b-a}{N}$.



9788770668781_indhold.indb 327 12/08/2019 12.42

Summen af sekantlængderne givet ved:

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta l_i = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{f'(\theta_i)^2 + 1} \cdot \Delta x_i$$

er derfor en *middelsum* for integralet:

$$\int_a^b \sqrt{f'(x)^2 + 1}\, dx$$

Når N går mod uendelig, vil middelsummen konvergere mod integralet, hvorfor kurvelængden netop er givet ved integralet. Det samme argument gælder naturligvis også selv om intervalinddelingen ikke er ækvidistant. Vi har altså bevist den følgende sætning:

Sætning 6: Kurvelængden for en graf

Lad $f(x)$ være en differentiabel funktion med en kontinuert differentialkvotient $f'(x)$. Da er kurvelængden L af grafen fra grafpunktet $(a, f(a))$ til grafpunktet $(b, f(b))$ givet ved integralet:

$$L = \int_a^b \sqrt{f'(x)^2 + 1}\, dx.$$

Da integralet involverer en kvadratrod, er det ikke-trivielt, og selv når $f(x)$ er et polynomium, kan vi ikke regne med at finde en stamfunktion, der kan udtrykkes ved simple funktioner. De gængse værktøjsprogrammer har en indbygget kommando til udregning af kurvelængder, se nærmere på bogens **website**.

Øvelse 7.11 **Længden af cirkelbuer**

Betragt enhedscirklen med centrum i (0,0).

a) Gør rede for, at buelængden i første kvadrant fra $x = 0$ til $x = x_0$ er givet ved integralet: $\int_0^{x_0} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

b) Udregn integralet med dit værktøjsprogram, og kommenter resultatet.

c) Hvad bliver buelængden fra $x = 0$ til $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$? Kommenter resultatet.

Øvelse 7.12 **Længden af parabelbuer**

Betragt parablen, der er graf for funktionen $f(x) = x^2$.

a) Udregn kurvelængden i første kvadrant fra $x = 0$ til $x = x_0$.

b) Hvad bliver kurvelængden fra $x = 0$ til $x = 1$?

9788770668781_indhold.indb 328 12/08/2019 12.42